

Глава I Векторная алгебра

§1 Матрицы

Анализ отношения между объектами может быть упорядочено за счет специального матеи. объекта, наз. матрицей.

Опр. Матрицей размера $m \times n$ наз. упорядоченная прямоугольная матрица чисел, содержащая m строк и n столбцов.

Элементы матрицы, находящиеся в i -строке и j -столбце обознач. a_{ij} .

Числа $m, n, m \cdot n$ наз. размерами матрицы.

Задача матрицы

Матрицы задаются перечислением их эл-ов

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

Опр. Если $m=n$, то матрица наз. квадратной.

Матрица размера $m \times 1$ $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$ наз. m -мерной (или m -каноничн.) столбцом.

Матрица размера $1 \times n$ наз. n -мерной (или n -каноничн.) строкой. $C = (c_1, c_2, \dots, c_n)$

Некоторые растения имеют суц. корень:

1) ungetrennt - die m-ten ersten $D = \begin{pmatrix} 00 \\ 00 \end{pmatrix}$ wirkt.

2) единичная (обозн. E или I) - матрица единиц,
 $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ диагональная

3) взапростие мат-я А по эмиссион
(абсорпцион), если
 $a_{ij} = a_j$, $V_{ij} = 1, \dots, n$

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \quad a_{22} = a_{21}$$

Defy. Sup.

$$j \sim a_{ij} \quad i \sim a_{ij} \quad a_{ii}$$

Diagonal

Встречи с конкурентами

Дир. мат-ву А и Б на разном, или
 сущ. опише принципа и их составных часть
компонента разно д. В.

$$a_{ij} = \delta_{ij} \quad \forall i \in [1..m] \quad \forall j \in [1..n]$$

Begrenzung: $A = B$

Imp.

Матрицы

$C = A + B$

и

$C_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$

$\Rightarrow$

C — матрица

суммы

м-н A, B , где a_{ij} и b_{ij} — элементы

A и B соответственно.

Sum: $\binom{123}{456} + \binom{011}{645} = \binom{134}{10911}$

Вспр. Матрица A
число $n \times n$
элементов
 a_{ij}

Пример: $2 \begin{pmatrix} 12 \\ 34 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 24 \\ 68 \end{pmatrix}$

Пр. $A - m \times n$ матрица, a $B - n \times k$ матрица.
 U_x $n \times n$ е. $m \times k$ матрица C .

$$C_{ij} = \sum_{p=1}^n a_{ip} \cdot b_{pj}$$

Struktur:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} ; \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1j} & \dots & b_{1k} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{i1} & b_{i2} & \dots & b_{ij} & \dots & b_{ik} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \dots & b_{mj} & \dots & b_{mk} \end{pmatrix}$$

$$c_{ij} = a_{i1} \cdot \delta_{1j} + a_{i2} \cdot \delta_{2j} + a_{i3} \cdot \delta_{3j} + \dots + a_{in} \cdot \delta_{nj}$$

i -ал эмрээр шалгуур A үүснэртэй на j -ын
эмрээр шалгуур B

Впр. Матрицы A и A^T конъюгированы.
Транспонированием.

A - матрица параметров $m \times n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix}$$

$$\text{Trump: } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix}$$

$$A^{-T} = A^T$$

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

66-ба оперуци прашаюти продавање

$$) (A^T)^T = A$$

$$2) (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$3) (A^T)^T = A^T$$

Imp. $(AB)^T = B^T A^T$ (find ~~disproportion~~)

Вспомогательные (димеризанты) м-у 2 и 3 парадокс

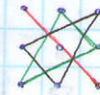
Для квадратных $n \times n$ матриц A и B определитель (детерминант)

определитель
 1) минор $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ каждый мат-н 2x2 порядка каж.
ранг-е м-ос ка наблюд значим минор
ранг-е м-ос ка показат значим

пр. Инжентерские разряды мат. уч. 3-го разряда

$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{13}a_{21}a_{32} + a_{12}a_{31}a_{23} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Намечено исполню гид. борщев. суп-м 300 квасика:



+

1

$$\Rightarrow X_1(a_1 a_{22} - a_{21} a_{12}) = \det(A) = (a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12})$$

#A/A/A/A/A

Чрезмерное:

при транспонировании квадратичной матрицы A по порядку 3×3 определитель не меняется.

$$\det A = \det A^T$$

Prüfung der

Рассматривая различные варианты, я пришла к выводу, что лучше всего будет использовать именно этот вариант.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 = \delta_1$$

 x_1, x_2 - неизвестные

$$① \quad (a_1 x_1 + a_2 x_2 + \dots + a_n x_n) = 0$$

 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}, \delta_1, \delta_2$ - угловые

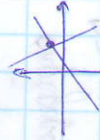
В матричном виде :

$$AX = B, \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$(2) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$$



Для нас важно иметь представление о состоянии системы и о ее функционировании.



Вок-3 о Необходимость

функции φ и ψ на $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ соответственно, $\varphi(x) = \psi(y)$ и $\varphi(x) = \psi(y)$ для $x \in \mathbb{R}^n$ и $y \in \mathbb{R}^m$.

$$\left(\begin{array}{c} a_{11} a_{22} x_1 + a_{12} a_{22} x_2 \\ a_{21} a_{22} x_1 + a_{22} a_{22} x_2 \end{array} \right) = \delta a_{22} \left(\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \end{array} \right)$$

$$\Rightarrow x_1(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = \det(A) = (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})$$

Аналогично умножим все урав на a_{11} и вычтем из урав

$$\text{Получим } x_2 \det A = \delta_2 a_{11} - \delta_1 a_{21}$$

$$\Rightarrow x_2 \det A = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \delta_1 \\ a_{21} & \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 \det A = \delta_1 \\ x_2 \det A = \delta_2 \end{cases}$$

Если $\det A = 0$, δ_1 или δ_2 не равно 0, то решение не существует.

Если $\det A = \delta_1 = \delta_2 = 0$, то тогда имеем (1) пропорциональные, и система имеет ∞ решений.

$$\begin{cases} 1x + 2y = 1 \\ 2x + 4y = 2 \end{cases}$$

Получим еще решение x_1 и x_2 , но $\det A \neq 0$.

О достаточности

Если $\det A \neq 0$, то решение существует однозначно
 $x_1 = \frac{\delta_1}{\det A}$ и $x_2 = \frac{\delta_2}{\det A}$ формулы Крамера

Получим для системы

$$x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \delta_1 \\ \delta_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \end{pmatrix}$$

$$x_1 \vec{\delta}_1 + x_2 \vec{\delta}_2 = \vec{\delta}$$



§2. Векторы. Линейные операции над векторами

В физике, механике и геометрии векторы имеют большое значение. Векторы представляют собой величины, имеющие направление.

Векторы (свойства, указание, путь) пар-ли не только числ., но и направлением.

Опр. Транспонированный вектор (направленный отрезок) пар. любой отрезок, концы которого выбраны одно из двух данных направлений $\vec{AB}$

Можно определить вектор как упорядоченную пару точек: первая точка в паре кон. начала, а вторая — кон. вектора.

Начало — точка произвольный вектор

$$\text{Обозн. } \vec{AB} \text{ (} \overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AB} \text{)}$$

Модуль (или длина) вектора = длина отрезка AB $|\vec{AB}|$

Векторы колл. нулевому, если его длина = 0 (начало и концы совпадают) $\vec{0}$ (0)

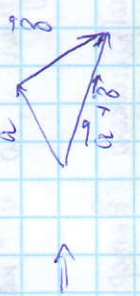
Для ненулевых направленных отрезков $\vec{AB}$ и $\vec{CD}$ равными (или $A \neq C$), если их можно соединить направленной линией (их начало и концы лежат на одной прямой и направлены в одну сторону).



Линейные операции

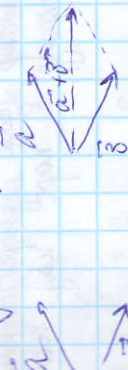
Если известны два направленных отрезка $\vec{a}$ и $\vec{b}$

то можно начать отрезок $\vec{c}$ с началом отрезка $\vec{a}$ и направлением отрезка $\vec{b}$, а концы — с концов отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$, т.е. $\vec{c} = \vec{a} + \vec{b}$



правило Δ

Операции сложения можно было выполнять по правилу пар-ма.



Результатом направл. отрезков $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. $\vec{c} : \vec{a} + \vec{b} = \vec{c}$

$$\forall \vec{a} : \vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

Множественность $\lambda \vec{a}$

- при $\lambda = 0$ нулевой вектор
- при $\lambda \neq 0$ направленный отрезок, длина которого равна $|\lambda| |\vec{a}|$, а направление совпадает с направлением $\vec{a}$, если $\lambda > 0$, и противоположно, если $\lambda < 0$.

Определение линейного вектора

Отношение равенства для отнесен. добавляемых: (эт-то называется вектор)

1. $a \sim a$
2. $a \sim b \Rightarrow b \sim a$
3. $a \sim b, b \sim c \Rightarrow a \sim c$

$M \sim M' \sim$ преобразовывать (переносить на класс)

Вспомогательный вектор (или прообраз вектора), на котором отнесен объект, связанный с равными направленными отрезками тем, что касаются у равных, друг другу напр. отрезков, представляющих равные векторы.

Вектор можно откладывать от разных точек.

Теорема о свойстве л.м. операций:

Операции сложения и умножения на векторах обладают свойством:

1. ассоциативность $\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$
2. ассоциативность $\lambda(\vec{a} + \vec{b}) = \lambda\vec{a} + \lambda\vec{b}$
3. дистрибутивность $(\lambda + \mu)\vec{a} = \lambda\vec{a} + \mu\vec{a}$

$$\forall \vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$$

Доказано (упр)

§3. Линейная зависимость и независимость векторов

Опр. Два вектора, паралл. одной и той же прямой, называются линейно-зависимыми.

Опр. Три вектора, паралл. одной плоскости, называются линейно-зависимыми.

Опр. Выразим вектор $\vec{a}_1 = \lambda_1 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$, где $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ как линейную комбинацию векторов $\vec{a}_2, \dots, \vec{a}_n$. Если все числа $\lambda_i = 0$, то это тривиальная линейная комбинация. Если не все — нетривиальная.

Выразим линейной комбинацией системы векторов

Опр. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно-зависимыми, если существует их нетривиальная линейная комбинация, равная нулю: $\lambda_1 \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Опр. Векторы $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ называются линейно-независимыми, если из условия $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ следует, что все $\lambda_i = 0$.

Критерий л.з.

Для того чтобы векторы были линейно-независимыми, необходимо, чтобы среди них был минимум один остаточный.

До-во

1) Необходимость

Если $\vec{a}_1, \dots, \vec{a}_n$ линейно зав., тогда сущ. числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ не все равные 0, такие что $\lambda_1 \vec{a}_1 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$.

Если $\lambda_1 = 0$, тогда $\vec{a}_1$ выражен.

$$\vec{a}_1 = -\frac{\lambda_2}{\lambda_1} \vec{a}_2 - \dots - \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \vec{a}_n$$

2) Достаточность

Если $\vec{a}_1 = \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n$

Тогда $(-1) \vec{a}_1 + \lambda_2 \vec{a}_2 + \dots + \lambda_n \vec{a}_n = \vec{0}$ линейно-зависимыми.

Т.е.

Если вектор линейно-зависим, т.е. л.з., тогда он равен 0.
Для вектора линейно-зависим т.е. л.з., они линейно-зависимы.
Три вектора линейно-зависимы т.е. л.з., они линейно-зависимы.
До-во (упр)

§4. Базис. Координаты вектора в базисе.

Опр. V_1 — прямая линейно-зависимых векторов, линейно-зависимых между собой (т.е. 11 одна прямая).

V_2 — пр-до всех линейно-зависимых между собой векторов (т.е. 11 плоскость).

V_3 — пр-до всех линейно-зависимых векторов.

V_1 линейно-зависимый вектор напрямую зависим в V_1 .
Тогда любой вектор $\vec{v} \in V$ выражен в V_1 как $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \dots + \lambda_n \vec{e}_n$.

V_2 Любую упорядоченную пару линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2$ как базис.

$\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2$, λ_1, λ_2 - коэффициенты в базисе $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$

Коэффициенты λ_1 и λ_2 ортогональны. Действ., если $\vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 = \mu_1 \vec{e}_1 + \mu_2 \vec{e}_2 \Rightarrow$

$\Rightarrow (\lambda_1 - \mu_1) \vec{e}_1 + (\lambda_2 - \mu_2) \vec{e}_2 = \vec{0}$
но $\vec{e}_1$ и $\vec{e}_2$ линейно независимы $\Rightarrow \lambda_1 = \mu_1$ и $\lambda_2 = \mu_2$

V_3 Любую упорядоченную тройку линейно независимых векторов $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ как базис.

$\forall \vec{v} \in V_3 : \vec{v} = \lambda_1 \vec{e}_1 + \lambda_2 \vec{e}_2 + \lambda_3 \vec{e}_3$
 $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ - коэффициенты в базисе $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

Выведение в координатах

При сложении двух векторов их координаты складываются.

При умножении коор. умнож. на скаляр.
 $\vec{x} = x_1 \vec{e}_1 + x_2 \vec{e}_2 + x_3 \vec{e}_3$
 $\vec{y} = y_1 \vec{e}_1 + y_2 \vec{e}_2 + y_3 \vec{e}_3$

$\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1) \vec{e}_1 + (x_2 + y_2) \vec{e}_2 + (x_3 + y_3) \vec{e}_3$
 $\lambda \vec{x} = \lambda x_1 \vec{e}_1 + \lambda x_2 \vec{e}_2 + \lambda x_3 \vec{e}_3$

Для того чтобы два вектора $\vec{x}$ и $\vec{y}$ были линейно независимы (кон. линейно независимы) необходимо и достаточно чтобы их коэффициенты в базисе $\vec{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ удовлетворяли $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \end{pmatrix} \neq 0$ (на площадь)

Длины векторов $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ можно записать и относительно их разностей $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} = 0$

Для того чтобы три вектора $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ были линейно независимы необходимо и достаточно чтобы их разности $\det \begin{pmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{pmatrix} \neq 0$

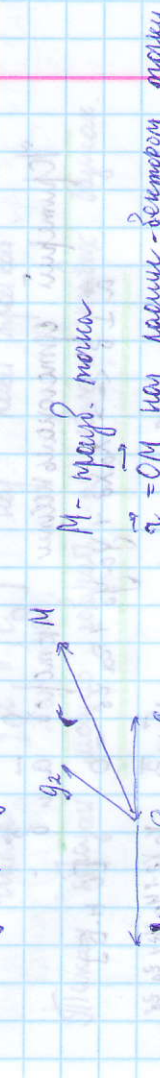
Решение упр.

5.5 Декартова система координат

Опр. Любая тройка базиса $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ и точки O в-от которых начались базисных векторов, наз. общей декартовой системой координат

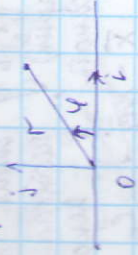


Опр. Если базис $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$ - ортонормированный (все углы 90° и взаимно перпендикулярны), то декартовой с.к. $\{O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$ наз. прямоугольной с.к. [п.к.т.]



Координаты точки M - упорядоченная тройка чисел $\{x_1, x_2, x_3\}$ наз. радиус-вектором точки M. $\vec{r} = OM$ в с.к. $\{\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3\}$

Параметры с.к. на плоскости



$$x_1 = |r| \cos \varphi$$

$$x_2 = |r| \sin \varphi$$

5.6 Скалярное произведение и ортогональное преобразование

Опр. Скалярным произ-вом двух векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ наз. число, равное произ-ю их длин на $\cos$ угла между ними.

$$|\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \cos \varphi = \vec{a} \cdot \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b})$$

Обоз. скалярное произ-ие:

$$1) \text{ коммутативность } \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$2) \text{ ассоциативность } (\lambda \vec{a}) \cdot \vec{b} = \lambda (\vec{a} \cdot \vec{b})$$

$$3) \text{ дистрибутивность } (\vec{a} + \vec{b}) \cdot \vec{c} = \vec{a} \cdot \vec{c} + \vec{b} \cdot \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a^2 \quad \text{скалярный квадрат}$$

Пусть $\vec{a}$ и $\vec{b}$ заданы координатами в ОНБ. i, j, k

$$\vec{a} = (x_a, y_a, z_a)$$

$$\vec{b} = (x_b, y_b, z_b)$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (x_a i + y_a j + z_a k) \cdot (x_b i + y_b j + z_b k) =$$

$$= x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b, \text{ т.к. } i \cdot j = j \cdot k = i \cdot k = 0$$

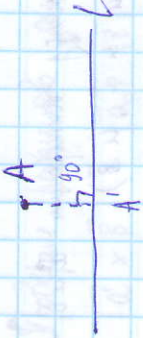
$$i^2 = j^2 = k^2 = 1$$

Примеры ортогональных преобраз $\vec{a}$ и $\vec{b}$:

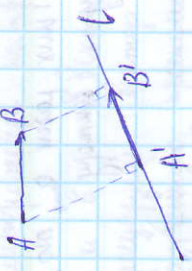
$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b = 0 \quad [0.4.5]$$

$$\text{Угол между } \vec{a} \text{ и } \vec{b}: \quad \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b}{\sqrt{x_a^2 + y_a^2 + z_a^2} \sqrt{x_b^2 + y_b^2 + z_b^2}}$$

Ортогональная проекция

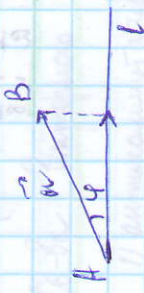


Пусть на плоскости задана прямая l и точка A . Выпущен из A перпендикуляр к l . Его основание A' наз. ортогональной проекцией A на прямую l .



Для $\vec{AB}$ можно считать $\vec{AB}$ отрезком прямой его началом и концом на прямой l . Тогда $\vec{A'B'}$ - ортогональная проекция $\vec{AB}$ на l .

$$|\text{пр}_l \vec{a}| = |\vec{a}| \cos(\vec{a}, \vec{l})$$



$$\vec{\text{пр}}_l \vec{a} = \frac{(\vec{a}, \vec{l})}{(\vec{l}, \vec{l})} \vec{l}$$

5.7 Векторное произведение

Опр. Векторное произведение двух векторов $\vec{a}, \vec{b}$ наз. вектор, если (если совмещены их начала) кратчайший вектор от $\vec{a}$ к $\vec{b}$ лежит в конусе вектора $\vec{c}$ ортогональный плоскости, порожденной $\vec{a}, \vec{b}$.

Плоскость $\{\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\}$ наз. плоскостью.

Плоскости порождены векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$ и перпендикулярны $\vec{c}$.

Векторный произведение коллинеарных векторов $\vec{a}$ и $\vec{b}$ нуль. Вектор $\vec{0}$, значит что:

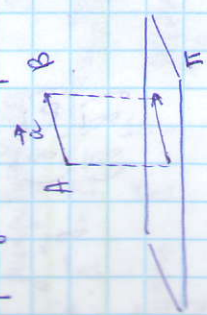
- 1) $|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$, α - угол между векторами $\vec{a}$ и $\vec{b}$
- 2) $\vec{c} \perp \vec{a}$ и $\vec{c} \perp \vec{b}$ (ортogonalен к $\vec{a}$ и $\vec{b}$)
- 3) норма $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c})$ - равна

Если $\vec{a}$ и $\vec{b}$ коллинеарны или если α их равен 0, то векторное произведение равно нулю.

Обозначение: $\vec{a} \times \vec{b}$ или $[\vec{a}, \vec{b}]$

Из следствия 1) $\Rightarrow |\vec{a} \times \vec{b}|$ есть площадь паралл. выпянутого на векторах $\vec{a}$ и $\vec{b}$

Проекция вектора на плоскость

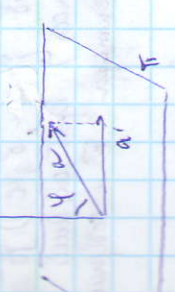


т.е. это вектор, соединяющий ортогонально проекции на плоскость π точек A и B.

Умножение:

вектор π -многообразия, $\perp \vec{b}$

Шага $\vec{a} \times \vec{b} = (pr_{\pi} \vec{a}) \times \vec{b}$



Заметим, что $\vec{a}, \vec{b}$ и $\vec{a'} = (pr_{\pi} \vec{a})$ лежат в одной плоскости, т.к. $\vec{a'} = \vec{a} + \lambda \vec{b}$ (линейная комбинация)

Следовательно $\vec{a} \times \vec{b}$ и $\vec{a'} \times \vec{b}$ коллинеарны. (по свойству, что если три вектора лежат в одной плоскости, то их векторное произведение равно нулю)

Шаг 1: $\vec{a} \times \vec{b} = (\vec{a'} + \lambda \vec{b}) \times \vec{b}$

Шаг 2: (используем формулу) $|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \alpha$

но $|\vec{a'}| = |\vec{a}| \sin \alpha$

Теорема: векторное произведение двух векторов

$\vec{a}$ и $\vec{b}$ - 2 вектора. Векторы их линейно независимы, перпендикулярны $\vec{b}$. Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ на 90° по ходу часовой стрелки и равно $|\vec{a}| |\vec{b}|$.

В-ва векторного произведения:

- 1) антисимметричность: $\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}$
- 2) ассоциативность (относительно умножения скалярами) $\lambda (\vec{a} \times \vec{b}) = (\lambda \vec{a}) \times \vec{b}$ (важно для векторного произведения)
- 3) дистрибутивность: $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$

Замечание: 1) Вспомогательная линия, что проекция суммы равна сумме проекций (для векторного произведения - 1/2 суммы)

$$pr_{\pi} (\vec{a} + \vec{b}) = pr_{\pi} \vec{a} + pr_{\pi} \vec{b}$$

Шага $(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = pr_{\pi} (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = (pr_{\pi} \vec{a} + pr_{\pi} \vec{b}) \times \vec{c}$

$$\vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} = pr_{\pi} \vec{a} \times \vec{c} + pr_{\pi} \vec{b} \times \vec{c}$$

Вспомогательная линия: $(pr_{\pi} \vec{a} + pr_{\pi} \vec{b}) \times \vec{c} = pr_{\pi} \vec{a} \times \vec{c} + pr_{\pi} \vec{b} \times \vec{c}$

$\vec{a'} \times \vec{c}$ - площадь паралл. выпянутого на $\vec{a'}$ и $\vec{c}$ $\pi/2$

$\vec{b'} \times \vec{c}$ - площадь паралл. выпянутого на $\vec{b'}$ и $\vec{c}$ $\pi/2$

Итак, потому что площадь паралл. выпянутого на $\vec{a'}$ и $\vec{c}$ равна сумме площадей паралл. выпянутого на $\vec{a'}$ и $\vec{b'}$ и $\vec{c}$.

 $\pi/2$

Ветеринарные препараты (8 а.м.б.)

Символ i, j, k - квадрат $O.M.B.$



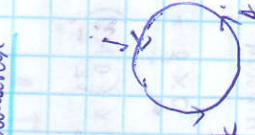
$$\begin{aligned} \int x^j dx &= \frac{x^{j+1}}{j+1} \\ \int x^k dx &= \frac{x^{k+1}}{k+1} \\ \int x^l dx &= \frac{x^{l+1}}{l+1} \end{aligned}$$

$$\vec{a} = x_1 \vec{a}_1 + x_2 \vec{a}_2 + x_3 \vec{a}_3$$

$$\vec{b} = x_4 \vec{a}_1 + x_5 \vec{a}_2 + x_6 \vec{a}_3$$

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

Векторное произведение δ координатах



$$\begin{aligned} j \cdot x_i &= -k \\ j \cdot x_k &= -j \\ k \cdot x_j &= -i \end{aligned}$$

Styrene monomers & Sumopar

$$\begin{array}{c} \begin{array}{cc} 1. & 2. \end{array} \\ \begin{array}{cc} x_{a1} & x_{a2} \end{array} \\ \begin{array}{cc} y_{a1} & y_{a2} \end{array} \\ \begin{array}{cc} z_{a1} & z_{a2} \end{array} \end{array}$$

Вам их безобразие проуче:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (x_{ai} + y_{aj} + z_{ak}) \times (x_{bi} + y_{bj} + z_{bk}) =$$

по закону гравитации:

$$= x_k x_j \cdot x_i - x_k y_j x_i - x_k z_j x_i + y_k x_j x_i + y_k y_j x_i + y_k z_j x_i - y_k z_j x_i + x_j x_i$$

$$+ z_a z_b k v_i + z_a y_b k v_j - z_a z_b k v_k =$$

$$= i(y_2 z_8^* - z_2 y_8^*) + j(z_2 x_8 - x_2 z_8) + k(x_2 y_8 - y_2 x_8) =$$

$$= \begin{vmatrix} y_a & z_a \\ y_b & z_b \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_a & z_a \\ x_b & z_b \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_a & y_a \\ x_b & y_b \end{vmatrix} k$$

$$= \begin{vmatrix} 1 & i & k \\ x_a & y_a & z_a \\ x_b & y_b & z_b \end{vmatrix}$$

§ 8. Силикатное разуплотнение и расовое ветровое приу-с

Впр. Векторный произведение трех векторов $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ называется равное $(\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}$ наз. число

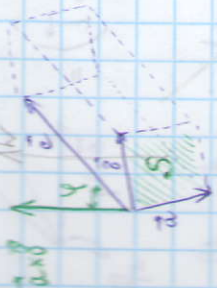
Выводим

Stachys recta

7h

Симметричные пре-е трех неканонических векторов
равно объему канонического, так как на этих
векторах $\sum$ знаков $+$ и $-$ есть тройка a, b, c - правая,
и a, b, c - левая.

Док-во:



Вектор $\vec{a} \times \vec{b}$ — площадь параллелограмма

$$|\vec{a} \times \vec{b}| = S$$

h — высота

$$h = |c| \cos \varphi$$

$$V = S \times h = \pm (a, b, c)$$

Векторное произведение

Дано: векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарны

$$a \times b = (b \times a) = -(a \times b) = -(-a \times b) = a \times b$$

при умножении вектора на скаляр результат не меняется
 $a \times b = (a \times b) \times c = a \times (b \times c)$, т.е. порядок операций не важен

Дано: векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ коллинеарны, т.е. $a \times b = 0$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$$

$$(a \times b) \times c = a \times (b \times c) = a \times (b \times c)$$

Векторное произведение $\vec{a} \times \vec{b}$ коллинеарно

Дано: векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ заданы своими координатами в ОНБ.

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} x_a \\ y_a \\ z_a \end{pmatrix} \quad \vec{b} = \begin{pmatrix} x_b \\ y_b \\ z_b \end{pmatrix} \quad \vec{c} = \begin{pmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{pmatrix}$$

$$a \times b = a(b \times c) = a \left\{ \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} i - \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} j + \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix} k \right\} =$$

$$= x_a \begin{vmatrix} y_b & z_b \\ y_c & z_c \end{vmatrix} - y_a \begin{vmatrix} x_b & z_b \\ x_c & z_c \end{vmatrix} + z_a \begin{vmatrix} x_b & y_b \\ x_c & y_c \end{vmatrix}$$

Векторное произведение

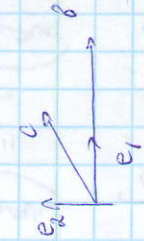
Дано: векторы $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$ — ортормы вектора $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c})$

Пока не поменяем направление:

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$$

Док-во:

Векторы $\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$



$$\vec{b} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} \vec{e}_1 & \vec{e}_2 & \vec{e}_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \begin{pmatrix} a_2 b_3 c_1 \\ -a_1 b_3 c_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{c} = a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3$$

$$\vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \begin{pmatrix} b_1(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ b_2(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \\ b_3(a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} c_1(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ c_2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \\ c_3(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3) \end{pmatrix}$$

Действительно, получим нулевой вектор.

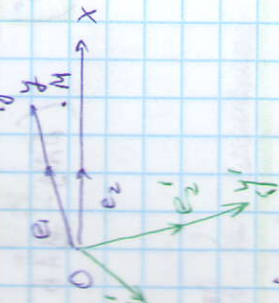
Получено

$$a \times (b \times c) = b(a \cdot c) - c(a \cdot b) = 0$$

Док-во с использованием формулы Лагранжа.

§9 Преобразование декартовых систем координат на плоскости и в пространстве

Работы на плоскости при декартовых с.к. с общим началом координат.О.



М-образная точка
 $\vec{OM} = \vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2 = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2$

Различные декарты $\vec{e}_1$ и $\vec{e}'_1$ по базисам $\vec{e}_1$ и $\vec{e}'_1$.

Шаг
 $\vec{e}'_1 = t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2$
 $\vec{e}'_2 = t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2$

В матричном виде $[\vec{e}_1, \vec{e}_2] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2] \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix}$

дет T=O, т.к. $\vec{e}'_1, \vec{e}'_2$ коллинеарны. T-матрица перехода от базиса $\vec{e}$ к базису $\vec{e}'$

Другой координат при новом базисе
 $\vec{r} = x'\vec{e}'_1 + y'\vec{e}'_2 = x'(t_{11}\vec{e}_1 + t_{21}\vec{e}_2) + y'(t_{12}\vec{e}_1 + t_{22}\vec{e}_2) =$

«симметрично» $= (t_{11}x' + t_{12}y')\vec{e}_1 + (t_{21}x' + t_{22}y')\vec{e}_2$

С другой стороны $\vec{r} = x\vec{e}_1 + y\vec{e}_2$

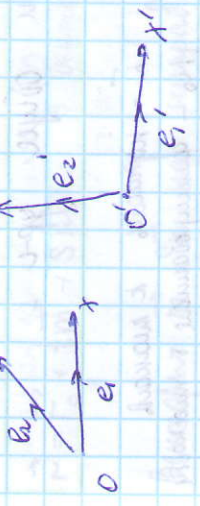
Сравниваем, базу единичных базисов базисов базисов

$$x = t_{11}x' + t_{12}y'$$

$$y = t_{21}x' + t_{22}y'$$

Запишем в матричном виде $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t_{11} & t_{12} \\ t_{21} & t_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$

Вектор



$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$ - координаты T.O' отсчитывая от $(O, \vec{e}_1, \vec{e}_2)$

$$\begin{cases} x = x' + \alpha \\ y = y' + \beta \end{cases}$$

В матричном виде:

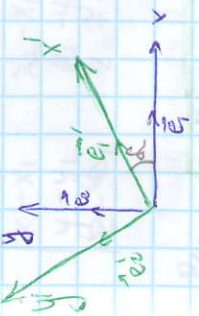
$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$$

$[\vec{e}'_1, \vec{e}'_2, \vec{e}'_3] = [\vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3] T$, где T-матрица перехода

Преобразование прямоугольной с.к. на плоскости

$$\vec{e}'_1 = \cos \alpha \cdot \vec{e}_1 + \sin \alpha \cdot \vec{e}_2$$

$$\vec{e}'_2 = -\sin \alpha \cdot \vec{e}_1 + \cos \alpha \cdot \vec{e}_2$$



Шаг матрица перехода (подбора на угол α)

$$T = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix}$$

Координаты будут считаться отсюда:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$$

$$x = x' \cos \alpha - y' \sin \alpha$$

$$y = x' \sin \alpha + y' \cos \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$